$a(bc)$ betekent $a - (b - c) = a - b + c$, maar
$(ab)c$ betekent $(a - b) - c = a - b - c$.

Verder is alles in orde: het eenheidselement is nul, en elk getal is zijn eigen invers (a^2 betekent $a - a = 0$, het eenheidselement).

Nog een meer algemene opmerking: we hebben eerder gezegd dat een groep bepaald is (abstrakt) door zijn multiplikatie-tabel. Omgekeerd definieert natuurlijk niet elke willekeurige multiplikatie-tabel een groep; de tabel moet daarvoor aan bepaalde eisen voldoen. Bijvoorbeeld moet elk element van de groep éénmaal en slechts éénmaal voorkomen in elke rij en elke kolom van de tabel. Dit is nog niet voldoende; er komen twee voorwaarden bij die we echter hier niet zullen behandelen (zie Jansen - Boon, blz. 10 - 12). De volgende tabel

	a	b	c
a	a	c	b
b	b	a	c
c	c	b	a

definieert zeker geen groep. Waarom niet?

Vraagstuk 1.

Gegeven zijn twee cyclische groepen

$$\{e,a,a^2\} \quad ; \quad a^3 = e$$
$$\text{en} \quad \{e,c\} \quad ; \quad c^2 = e\,.$$

Verder is gegeven dat $ca = a^{-1}c$. Vorm een groep G uit de elementen der beide cyclische groepen en bepaal de vermenigvuldigingstabel van deze groep. Toon aan dat de groep isomorf is met S_3 (of C_{3v}).

Oplossing: We beginnen met de elementen $\{e,a,a^2,c\}$, vormen produkten tot "stabiliteit" is bereikt (Postulaat I) en vormen vervolgens inverse elementen (Postulaat IV).

Produkten: $\underline{ac}$; $a^2c = a^{-1}c = \underline{ca}$. Het produkt ca hebben we dus al, en $ca^2 = ca^{-1}$. Maar, volgens $ca = a^{-1}c$ geldt dat $ac = ca^{-1} = ca^2$, zodat ca^2 reeds begrepen is in de verzameling.

Verder: $a(ac) = a^2c = a^{-1}c = ca$; $(ac)a = a(ca) = c$; $a^2(ac) = c$; $(ac)a^2 = a(ca)a = aa^{-1}ca = ca$; $a^2(ca) = (a^2c)a = (a^{-1}c)a = ca^2 = ac$; $(ca)a^2 = c$; $c(ac) = a^{-1} = a^2$; $(ac)c = a$; $c(ca) = a$; $cac = a^2$; $(ac)(ac) = aa^{-1}cc = e$; $(ac)(ca) = a^2$; $(ca)(ac) = ca^{-1}c = a$; $(ca)(ca) = e$.

Inverse elementen*: $\left.\begin{array}{l}(ac)^{-1} = c^{-1}a^{-1} = ca^2 = ac \\ (ca)^{-1} = a^{-1}c^{-1} = a^2c = ca\end{array}\right\}$ reeds begrepen in de verzameling.

De groep G bestaat dus uit elementen e, a, a^2, c, ac en ca.

Vermenigvuldingingstabel:

G	e	a	a^2	c	ac	ca
e	e	a	a^2	c	ac	ca
a	a	a^2	e	ac	ca	c
$a^{-1} = a^2$	a^2	e	a	ca	c	ac
$c^{-1} = c$	c	ca	ac	e	a^2	a
$ca^2 = ac$	ac	c	ca	a	e	a^2
$a^2c = ca$	ca	ac	c	a^2	a	e

Bij inspektie van de vermenigvuldigingstabel van S_3 blijkt dat G en S_3 isomorfe groepen zijn (we vervangen a,b,c in S_3

door 1,2,3):

G	$\longleftrightarrow$	S_3
e		e
a		(123)
a^2		(132)
c		(12)
ac		(13)
ca		(23)

* N.B. In feite is aan Postulaat IV automatisch voldaan: een *eindige* verzameling die voldoet aan Postulaten I en II vormt *altijd* een groep. Want stel $\underline{p}$ is een willekeurig element, dan moet de reeks $p, p^2, p^3, \ldots$ afbreken met $p^n = p$ voor eindige $\underline{n}$. Dan is $p^{n-1} = e$ en $p^{n-2} = p^{-1}$, dus de eenheid en alle inverse elementen komen eveneens voor.

§4 *Subverzamelingen en Subgroepen.*

1. *Subverzamelingen* (engels "subsets", frans "sous-ensembles", duits "Untermengen").

Een groep is een speciaal soort verzameling (nl. een verzameling met algebraïsche struktuur, waarvan de kombinatie-wet aan Postulaten II, III en IV voldoet). We zullen nu subgroepen (groepen in een groep) invoeren met betrekking tot subverzamelingen (verzamelingen in een verzameling).

Een verzameling B is *subverzameling* van A indien alle elementen van B ook elementen van A zijn. Dit schrijven we als $B \subset A$. Nu beschouwen we twee subverzamelingen B, C van A: $B, C \subset A$. Dan kunnen we de *vereniging*, $B \cup C$, van B en C

waarbij a_p of a_q *willekeurige* (ga dit na!) elementen zijn van hun respektievelijke nevenverzamelingen, en waarbij we, om H zèlf in de ontleding op te kunnen nemen, afspreken dat a_1 een willekeurig element van H voorstelt; gemakshalve het eenheidselement $\underline{e}$. Dit soort ontledingen zal later nog vaak ter sprake komen. Er bestaan ook zgn. "dubbele" nevenverzamelingen, van de vorm HaH (symmetrische) of HaK (niet-symmetrische; H en K verschillende subgroepen). Een paar van zulke strukturen zullen we behandelen als we wat verder zijn.

Vraagstuk 2.

Toon aan dat alle groepen van orde lager dan 6 kommutatieve (abelse) groepen zijn. Zijn het ook allemaal cyclische groepen?

Oplossing:

Groepen met orde 1, 2, 3 en 5 zijn cyclische groepen, want hun orde is een *priemgetal*. Blijft de groep van orde 4. De eerste mogelijkheid is een cyclische groep $\{e,a,a^2,a^3;\ a^4=e\}$. Er is evenwel nog een tweede mogelijkheid, nl. een groep $\{e,a,b,ab\}$, met $a^2 = b^2 = e$, $ab = ba$; dan is $(ab)^2 = abab = aabb = e$.

Vermenigvuldingstabel:

	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

$a^{-1} = a$; $b^{-1} = b$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba = ab$. Deze groep wordt de "*viergroep van Gauss*" genoemd; zij is wel abels, maar niet cyclisch.

Vraagstuk 3.

Bewijs dat elke subgroep van een cyclische groep weer cyclisch is.

Bewijs:

Stel G, van orde n, heeft a als genererend element, d.w.z. $G = \{e,a,a^2,\dots,a_{n-1}\}$, $a^n = e$. Stel G bevat de echte subgroep

$$H = \{e,h_1,h_2,\dots,h_{m-1}\}\text{ , van orde } m .$$

Dan is dus m een deler van n.
Stel a^γ, met $\gamma > 1$, is de laagste macht van a (behalve $a^o = e$) die voorkomt in H. Dan bevat H de cyclische subgroep

$$\{e,a^\gamma,a^{2\gamma},\dots,a^{(p-1)\gamma}\} \subseteq H \ ; \quad a^{p\gamma} = e ,$$

van orde (zeg) p, een deler van m (en dus van n). Anderzijds bevat G de cyclische subgroep gegenereerd door a^p. Aangezien $a^{\gamma p} = e$, is deze subgroep van orde γ, en dus is γ een deler van n.

We moeten nu nog bewijzen dat H geen elementen a bevat, met q geen geheel getal ($q\gamma$ is natuurlijk geheel). Stel dat $r-1 < q < r$, met r geheel. Aangezien H een subgroep is, en het element $a^{(r-1)\gamma}$ voorkomt in H, moet dan ook het element $(a^{(r-1)\gamma})^{-1}a^{q\gamma} = a^{(q-r+1)\gamma}$ begrepen zijn in H (subgroep voorwaarde). Maar $q-r+1 < 1$, en dus bevat dan H een macht van a kleiner dan γ: *tegenspraak*. De subgroep H is derhalve cyclisch.

Vraagstuk 4.

Wat is het centrum van de groep G van alle $n \times n$ niet-singuliere matrices?

Oplossing:

Beschouw een $n \times n$ niet-singuliere matrix B. We gaan na, onder welke voorwaarden deze matrix kommuteert met een willekeurige andere $n \times n$ niet-singuliere matrix, zeg A, van de groep G. De matrices A en B kommuteren indien het (i,j)-element van de matrix AB gelijk is aan het (i,j)-element van de matrix BA, voor $i,j = 1,2,\ldots,n$, d.w.z.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} ,$$

ofwel

$$a_{ij}(b_{jj} - b_{ii}) = \sum_{k\neq i} b_{ik}a_{kj} - \sum_{k\neq j} a_{ik}b_{hj} .$$

Aangezien de matrix A totaal willekeurig is (hoewel niet-singulier), kan aan deze eis slechts zijn voldaan indien in de bovenstaande gelijkheid de koëfficiënten van alle matrixelementen van A gelijk zijn aan nul. Dit geeft twee oplossingen:

1) $b_{ij} = 0$ voor alle i,j: onmogelijk, want B is niet-singulier;
2) $b_{ij} = c\delta_{ij}$, met c een willekeurig komplex getal.

Dit betekent: $B = cI$, met I de $n \times n$-eenheidsmatrix. Voor het centrum van G, $C(G)$, vinden we dus:

$$C(G) = \{B \mid B = cI;\ c \text{ een willekeurig komplex getal, ongelijk nul}\} .$$

Dit is een homomorfisme, want

$$f(gh) = s^{-1}ghs = (s^{-1}gs)(s^{-1}hs) = f(g)f(h) \ .$$

Verder, $f(g) = f(g')$ betekent $s^{-1}gs = s^{-1}g's$ en dus $g = g'$, zodat we met een isomorfisme en dus met een automorfisme te doen hebben $(G = G')$. Voor abelse groepen is dit de triviale afbeelding $f(g) = g$, want $f(g) = s^{-1}gs = gs^{-1}s = ge = g$.
We zeggen dat twee elementen g, h van G *gekonjugeerd* zijn als er een element $s \in G$ bestaat zó dat $h = s^{-1}gs$, en we schrijven deze relatie als $h \sim g$.

Vraagstuk 5.

Stel $f: G \to G'$ is een m-op-1 homomorfe afbeelding van een groep G op een groep G'. Stel C' is een klasse van G'. Laat zien dat de fiber, $f^{-1}(C')$, van C' bestaat uit volledige klassen van G. Toon verder aan dat de orde van elk dezer klassen van G een veelvoud is van, of gelijk is aan, de orde van C'. De afbeelding $f: C \to C'$ is echter algemeen geen homomorfisme. Waarom niet?

Oplossing:

Stel het element $a \in G$ ligt in $f^{-1}(C')$, dus $f(a) \in C'$. Dan wordt *elk* element van de klasse C van $\underline{a}$ afgebeeld in C', want $f(s^{-1}as) = [f(s)]^{-1}f(a)f(s)$ is gekonjugeerd met $f(a)$ en ligt dus in C'. Hiermee is het eerste deel bewezen.

Elk element van C' is te schrijven als $[f(g)]^{-1}f(a)f(g)$, met $g \in G$. Aangezien $[f(g)]^{-1}f(a)f(g) = f(g^{-1}ag)$, is er voor elk element van C' een element $g^{-1}ag \in C$, dat dit element tot beeld heeft. Derhalve wordt C afgebeeld *op* C'. Verder, stel $f(t^{-1}at) = f(a)$, met $t^{-1}at \neq a$, d.w.z. twee verschillende elementen van de klasse C van $\underline{a}$ hebben hetzelfde beeldelement in C'. Stel $f(p^{-1}ap) \neq f(a)$ voor bepaalde $p \in G$. Dan is $f[(tp)^{-1}a(tp)] = f(p^{-1}t^{-1}atp) = f(p^{-1})f(t^{-1}at)f(p) = f(p^{-1})f(a)f(p) = f(p^{-1}ap)$; verder is $(tp)^{-1}a(tp) \neq p^{-1}ap$, dus twee *andere, verschillende* elementen van C, nl. $p^{-1}ap$ en $(tp)^{-1}a(tp)$, hebben weer eenzelfde beeld in C'. Enzovoort. Aangezien C afgebeeld wordt *op* C', is de orde van deze klasse van G gelijk aan de orde van C', of een veelvoud ervan.

Tenslotte: een klasse is algemeen niet gesloten onder vermenigvuldiging, dus van een *homomorfe* afbeelding $f: C \to C'$ kan geen sprake zijn.

Vraagstuk 6.

Gegeven een eindige groep G, een subgroep $H \subset G$ en een klasse C_ℓ van G. Stel dat de doorsnede $H \cap C_\ell$ niet leeg is. Laat zien dat deze doorsnede bestaat uit volledige klassen *van* H.

Bewijs:

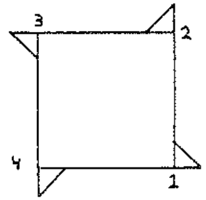
Een klasse C_h van de *subgroep* H bestaat uit de elementen $(h')^{-1}hh'$, waarbij h' alle elementen van H doorloopt. Beschouw een element $\underline{g}$ van G dat ook in C_ℓ ligt, dus $g \in C_\ell$. Stel het element $h \in H$ ligt in de doorsnede $H \cap C_\ell$; dan kan $\underline{h}$ geschreven worden als $s^{-1}gs$, voor zekere $s \in G$. Maar dan is, voor willekeurige $h' \in H$, $(h')^{-1}hh' = (h')^{-1}s^{-1}gsh' = (sh')^{-1}g(sh') \in C_\ell$, want $sh' \in G$. Het element $(h')^{-1}hh'$ ligt echter tevens in de subgroep H, en zodoende in de doorsnede $C_\ell \cap H$. Hieruit volgt dat de hele klasse C_h in de doorsnede ligt.

Speciale gevallen:

$H = G$; $H \cap C_\ell = C_\ell$, een klasse van H. $H = \{e\}$; een niet-lege doorsnede betekent $e \in C_\ell$, en derhalve $\{e\} = C_\ell$, en dan is de doorsnede gelijk aan $\{e\}$, een klasse van H. Ten derde: stel H is abels, maar G is niet abels. Elk element van de niet-lege doorsnede is ook een element van H, en ligt dus automatisch op zichzelf in een klasse van deze abelse subgroep. Tenslotte: stel G is abels; dan is H eveneens abels. De klasse C_ℓ bestaat uit één enkel element van G, en de niet-lege doorsnede is ditzelfde element, een volledige klasse van de abelse subgroep H.

Vraagstuk 7.

Beschouw de volgende figuur:



Bepaal de symmetriegroep van deze figuur. Bepaal vervolgens de klassen van deze groep. Schrijf de operaties als permutaties van de hoeken 1, 2, 3 en 4. Het blijkt nu dat, in tegenstelling tot de regel, permutaties met dezelfde niet-samenhangende cykelstruktuur niet altijd tot dezelfde klasse behoren. Wat is er verkeerd gegaan?

Oplossing:

De symmetrie-operaties van deze figuur zijn e, C_4, C_4^2 en C_4^3. De symmetriegroep is de cyclische groep van de orde vier, deze groep is abels; derhalve vormt elk element een klasse op zichzelf.
Geschreven als permutaties van de hoeken 1, 2, 3 en 4 luiden de operaties

$$e = (1)(2)(3)(4)$$
$$C_4 = (1432)$$
$$C_4^2 = (13)(42)$$
$$C_4^3 = (1234)$$

Bewezen is dat gekonjugeerde elementen dezelfde cykelstruktuur hebben. Dit geldt nog steeds, hoewel triviaal in dit geval. Voor het omgekeerde, d.w.z. dat elementen met dezelfde cykelstruktuur tot dezelfde klasse behoren, is het nodig dat de permutatie die de herlabeling van de cykels uitvoert, aanwezig is in de groep. Dit is uiteraard het geval in de volledige permutatiegroep. Hier is het echter niet zo, want de permutatie (24), die (1432) zou konjugeren met (1234) volgens $(1432) = (24)(1234)(24)^{-1}$, is geen groepselement.

Vraagstuk 8.

Gegeven een groep G van oneven orde. Bewijs dat de volledige groep G langs de diagonaal van de vermenigvuldigingstabel staat.

Oplossing:

Schrijf G als $\{e,a,b,\ldots\}$. Langs de diagonaal van de vermenigvuldigingstabel staat de verzameling $\{e^2=e,a^2,b^2,\ldots\}$ van kwadraten der elementen, dus ${}^{o}G$ kwadraten. We moeten laten zien dat voor ${}^{o}G$ oneven alle kwadraten verschillend zijn.

Stel dat toch ergens $a^2=b^2$, met $b\neq a$ en ${}^{o}G$ oneven. Het element $\underline{b}$ kan altijd worden geschreven als $b=at$, voor zekere $t\in G$. Dan volgt $a^2=atat$, dus $a=tat$, waaruit volgt $t^{-1}=a^{-1}ta\ (=ata^{-1})$, d.w.z. $t^{-1}\sim t$. De klasse C_t is derhalve ambivalent. We hebben evenwel (zie tekst) aangetoond dat een groep van oneven orde slechts de triviale ambivalente klasse $\{e\}$ bezit, dus $t=e$; $b=at=ae=a$, een tegenspraak. Alle kwadraten zijn derhalve verschillend, waarmee het gestelde is bewezen.

Vraagstuk 9.

Beschouw een willekeurig element $\underline{t}$ van een groep G. Laat zien dat het aantal elementen $s \in G$ waarvoor geldt $tsts^{-1} = e$, gelijk is aan ${}^{o}G/c_t$, met c_t de orde van de klasse C_t, wanneer C_t een ambivalente klasse is, en nul wanneer C_t niet-ambivalent is. Bewijs vervolgens dat het totale aantal paren (s,t), $s, t \in G$ willekeurig, dat aan bovenstaande relatie voldoet, gelijk is aan $m_a {}^{o}G$, met m_a het aantal ambivalente klassen van G.

Oplossing:

De relatie $tsts^{-1} = e$ impliceert $t^{-1} = s^{-1}ts$ $(= sts^{-1})$, d.w.z. C_t is ambivalent (anders is er geen enkel element $s \in G$ waarvoor de relatie $tsts^{-1} = e$ geldt).

In de konjugatie sts^{-1} voor vaste $t \in C_t$, alle $s \in G$, genereren precies ${}^{o}N_t$ elementen $\underline{s}$ een *willekeurig* element $t' \in C_t$; namelijk de ${}^{o}N_t$ elementen van de linker-nevenverzameling $s'N_t$, met $s't(s')^{-1} = t'$. Een ambivalente klasse bevat met elk element $\underline{t}$ ook zijn inverse t^{-1}; derhalve wordt ook het element t^{-1} op ${}^{o}N_t$ manieren gegenereerd door de konjugatie sts^{-1}. Dit aantal is gelijk aan ${}^{o}N_t = {}^{o}G/c_t$ (zie theorema 12), waarmee het gestelde is bewezen.

Nu variëren we $\underline{t}$ over G. Voor *elke* ambivalente klasse C_t zijn er $c_t({}^{o}G/c_t) = {}^{o}G$ elementen $s \in G$ met de eigenschap $tsts^{-1} = e$; in totaal levert dit $m_a {}^{o}G$ paren (s,t), met m_a het aantal ambivalente klassen van G.

Vraagstuk 10.

Gegeven een groep G, een subgroep H en een normale subgroep $N \subset H$. Bewijs dat N ook een normale subgroep is van H. Toon aan dat de faktorgroep H/N een subgroep is van de faktorgroep G/N.

Oplossing:

De bewering " N normaal in H " volgt onmiddellijk uit $s^{-1}Ns = N$ voor alle $s \in G$ (want N is normaal in G). Dan geldt dus tevens $h^{-1}Nh = N$ voor alle $h \in H$, want $H \subset G$.

Om het tweede deel te bewijzen, schrijven we

$$H/N = \{a_1N, a_2N, \ldots, a_mN\} \; ; \; a_1 = e \; , \; m = {}^{o}H/{}^{o}N$$

en

$$G/N = \{b_1N, b_2N, \ldots, b_pN\} \; ; \; b_1 = e \; , \; p = {}^{o}G/{}^{o}N \; .$$

Dus $p > m$ en $p/m = {}^{o}G/{}^{o}H$ is een positief geheel getal. We kunnen daarom G/N schrijven als

$$G/N = \{c_1H/N, c_2H/N, \ldots, c_\ell H/N\} \; ; \; c_1 = e \; , \; \ell = \frac{p}{m} = {}^{o}G/{}^{o}H \; .$$

H/N is een groep; G/N is een groep en $H/N \subset G/N$, dus is H/N automatisch een subgroep van G/N.

Vraagstuk 11.

Gegeven zijn een groep G en een normale subgroep N. Stel de nevenverzamelingen $N, a_1N, a_2N, \dots, a_sN$ vormen een subgroep van de faktorgroep G/N. Laat zien dat het komplex van elementen

$$[\{N\}, \{a_1N\}, \{a_2N\}, \dots, \{a_sN\}]$$

een subgroep H vormt van G, en dat de index van H in G dezelfde is als de index van de subgroep

$$\{N, a_1N, a_2N, \dots, a_sN\} \text{ in } G/N .$$

Oplossing:

We geven de subgroep van de faktorgroep G/N aan door $\{a_kN\}$; $k=0$ $(a_oN=N), 1, 2, \dots, s$. De subgroep-voorwaarde geeft $(a_iN)(a_jN)^{-1}=a_mN$, voor willekeurige $0 \leqslant i,j \leqslant s$. Dit geeft, voor de elementen van het komplex H:

$$(a_in_{i'})(a_jn_{j'})^{-1} \in a_mN \subset H ,$$

waarmee bewezen is dat H inderdaad een subgroep vormt van G. De orde van H is $(s+1)\,{}^oN$, die van $\{a_kN\}$ is $s+1$, en die van G/N is ${}^oG/{}^oN$. Dus

$$(\text{index van } H \text{ in } G)\ {}^oG/(s+1)\,{}^oN = \frac{{}^oG/{}^oN}{(s+1)}\ (\text{index van } \{a_kN\} \text{ in } G/N) .$$

Vraagstuk 12.

Met een kommutator in een groep G bedoelen we elk element dat geschreven kan worden als $s^{-1}t^{-1}st$, voor s,t twee willekeurige elementen van G. *Voorbeeld*: het eenheidselement is altijd een kommutator, nl. voor $t=s$, $s\in G$ willekeurig. Voor een abelse groep is $\underline{e}$ de enige kommutator, want $s^{-1}t^{-1}st=e$ voor alle $s,t\in G$. Laat zien dat de volgende beweringen gelden:

a) Als het element $g\in G$ een kommutator is, dan geldt dit eveneens voor g^{-1}. Bovendien zijn, met $\underline{g}$, alle elementen van de klasse C_g kommutatoren.

b) Uit a) volgt dat de verzameling van kommutatoren van elke groep G bestaat uit volledige klassen van elementen van G. Deze verzameling vormt echter algemeen geen (niet-triviale) subgroep van G.

c) We vullen de verzameling van kommutatoren aan met produkte[n] van kommutatoren tòt de nieuwe verzameling wèl een subgroe[p] van G is. Deze subgroep H_c heeft de volgende eigenschappen: i) H_c is normaal; ii) de faktorgroep G/H_c is abels; iii) H_c is de kleinste normale subgroep van G met abelse faktorgroep.

Oplossing:

a) Stel $g\in G$ is een kommutator, d.w.z. er bestaat een paar (s,t) van elementen, zó dat $g=s^{-1}t^{-1}st$. Dan geldt $g^{-1}=t^{-1}s^{-1}ts$, dus g^{-1} is opnieuw een kommutator. Elk ander element van de klasse C_g kan geschreven worden als $u^{-1}gu=u^{-1}s^{-1}t^{-1}stu$ $=(u^{-1}s^{-1}u)(u^{-1}t^{-1}u)(u^{-1}su)(u^{-1}tu)=(u^{-1}su)^{-1}(u^{-1}tu)^{-1}(u^{-1}su)(u^{-1}t$ en is derhalve ook een kommutator.

b) De verzameling van kommutatoren heeft weliswaar de eigenschappen dat de eenheid erin begrepen is en dat alle inversen eveneens deel uitmaken van de verzameling, maar ze is algemeen *niet stabiel*: $(s^{-1}t^{-1}st)(p^{-1}q^{-1}pq)$ kan algemeen niet worden geschreven als $u^{-1}v^{-1}uv$. We hebben dus hier niet te maken met een subgroep van G (behalve, natuurlijk, voor abelse G).

c) i) We korten een kommutator $g_i^{-1}g_j^{-1}g_ig_j$ af met c_{ij}. Na aanvulling met produkten van kommutatoren kan een willekeurig element van H_c geschreven worden als $c_{ij}c_{k\ell}\dots c_{pq}$. Maar dan is, voor elke $g \in G$, $g^{-1}c_{ij}c_{k\ell}\dots c_{pq}g = (g^{-1}c_{ij}g)(g^{-1}c_{k\ell}g)\dots(g^{-1}c_{pq}g)$ weer een produkt van kommutatoren, en ligt derhalve opnieuw in H_c. De subgroep (per definitie) H_c is dus normaal.

ii) De faktorgroep G/H_c bestaat uit de elementen (nevenverzamelingen) $\{s_iH_c\}$; $i = 1,2,\dots,{}^oG/{}^oH_c$; $s_1 = e$. Aangezien H_c normaal is, geldt $s_1H_cs_2H_c = s_1s_2H_c$, voor willekeurige $s_1,s_2 \in \{s_i\}$. Anderzijds is $s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_2$ een kommutator, zeg $h_c \in H_c$. Hieruit volgt $s_1s_2 = s_2s_1h_c$ en dus $(s_1H_c)(s_2H_c) =$ $= s_1s_2H_c = s_2s_1h_cH_c = s_2s_1H_c = (s_2H_c)(s_1H_c)$, zodat de faktorgroep G/H_c *abels* is.

iii) Stel $H \subset G$ is een *andere* normale subgroep met abelse faktorgroep G/H. Aangezien G/H abels is, geldt dat $t_1Ht_2H = t_2Ht_1H$ voor *willekeurige* (ga dit na!) $t_1,t_2 \in G$. Maar H is normaal, zodat volgt $t_1t_2H = t_2t_1H$ en dus $t_1^{-1}t_2^{-1}t_1t_2H = H$, m.a.w. $t_1^{-1}t_2^{-1}t_1t_2 \in H$, nog steeds voor willekeurige $t_1,t_2 \in G$. Dit betekent dat alle kommutatoren van G in H moeten liggen, en dus ook alle produkten van kommutatoren, want H is een (sub)-groep. We konkluderen dat $H_c \subseteq H$, waarmee het gestelde is bewezen.